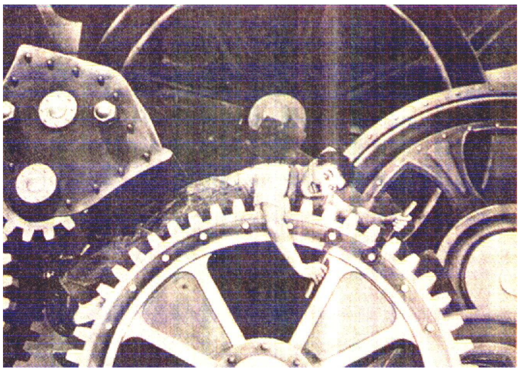
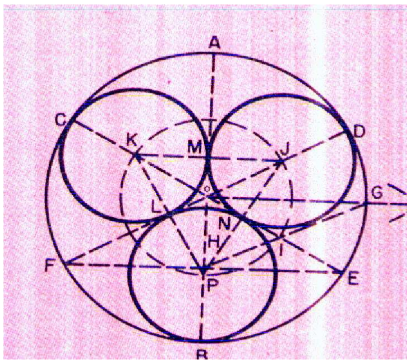
Revisão:
Geometria Plana

TERCEIRA SÉRIE

ENSINO MÉDIO

INTEGRADO





Relações métricas envolvendo a circunferência

Prof. Rogério Rodrigues

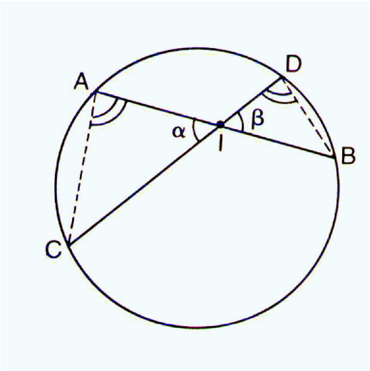
NOME : ....

NÚMERO : .... TURMA : ....

X - RELAÇÕES MÉTRICAS NO DISCO (Potência de Ponto)

X .1) Relação Métrica entre duas cordas de interseção interna ao disco :

Considere a figura a seguir . Nela representamos duas cordas AB e CD de um disco .



Observe que os triângulos AIC e DIB são semelhantes pelo caso A.A. , pois

a) os ângulos de vértices A e D assinalados , por determinarem o mesmo arco BC e serem inscritos na circunferência representada , são congruentes ;
b) os ângulos de medidas α e β assinalados são O.P.V. , portanto são congruentes .

Então $\frac{AI}{DI} = \frac{\text{CI}}{\text{BI}} \Rightarrow$ $\boxed{\text{(AI)(BI) = (CI)(DI)}}$

Então , podemos enunciar

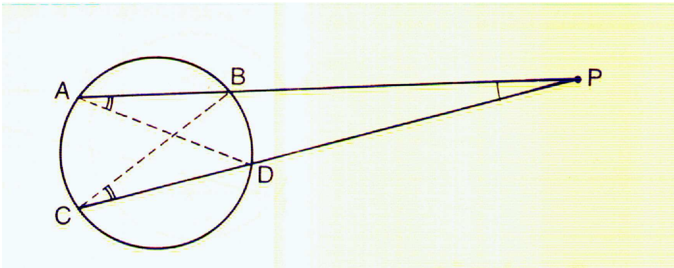
Se duas cordas se interceptam no interior de um disco , então o produto das medidas dos segmentos determinados em cada uma delas é constante .

OBS : Esse resultado pode ser generalizado para várias cordas que se interceptam num mesmo ponto interno ao disco , ou seja , se as cordas A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , ... , A_nB_n se interceptam no ponto O , interno ao disco , então

$$\boxed{(A_1O).(OB_1) = (A_2O).(OB_2) = (A_3O).(OB_3) = \ ... \ = (A_nO).(OB_n)}$$

X . 2) <u>Relação Métrica entre dois segmentos secantes a uma circunferência e de interseção externa ao disco</u> :

Considere a figura a seguir . Nela representamos um disco e dois segmentos PA e PC , secantes à circunferência representada , de interseção P externa ao disco .



Traçando os segmentos AD e BC , percebe-se que os triângulos PAD e PCB são semelhantes pelo caso A.A. , pois

a) os ângulos de vértices A e C , assinalados na figura , são inscritos que determinam o mesmo arco BD da circunferência ;

b) O ângulo de vértice P , assinalado na figura , é comum aos dois triângulos .

Então , $\frac{PA}{PC} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{PB}} \Rightarrow$ $\boxed{(\mathrm{PA}).(\mathrm{PB}) = (\mathrm{PC}).(\mathrm{PD})}$

Então , podemos enunciar :

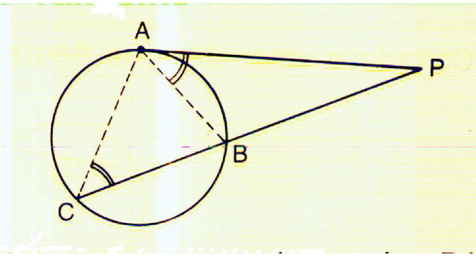
Se dois segmentos são secantes a uma mesma circunferência e de interseção externa à circunferência , então , em cada um dos segmentos , o produto da medida do segmento inteiro pela medida de sua parte externa ao disco é constante .

<u>OBS</u> : Esse resultado pode ser generalizado para vários segmentos que se interceptam em um mesmo ponto externo ao disco,ou seja , se os segmentos PA_1 , PA_2 , ... e PA_n se interceptam no ponto P, externo a um disco e interceptam a circunferência , respectivamente , nos pontos B_1 , B_2 , ... e B_n , então

$$\boxed{(PA_1).(PB_1) = (PA_2).(PB_2) = (PA_3).(PB_3) = \ldots = (PA_n).(PB_n)}$$

X . 3) <u>Relação Métrica envolvendo um segmento secante à circunferência e um segmento tangente à mesma circunferência</u> :

Considere a figura a seguir . Nela representamos um segmento PA , tan - gente à circunferência mostrada no ponto A e outro segmento PC , secante à mesma circunferência .



Traçando os segmentos AB e AC , percebemos que os triângulos PAB e PCB são semelhantes pelo caso A.A. , pois

a) os ângulos de vértices A e C assinalados (o primeiro é semi-inscrito e o segundo é inscrito) determinam , na circunferência o mesmo arco AB ;
b) O ângulo de vértice P assinalado é comum aos dois triângulos .

Então , $\frac{PA}{PC} = \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} \Rightarrow$ $\boxed{(\mathrm{PA})^2 = (\mathrm{PB}).(\mathrm{PC})}$

Agora , podemos enunciar :

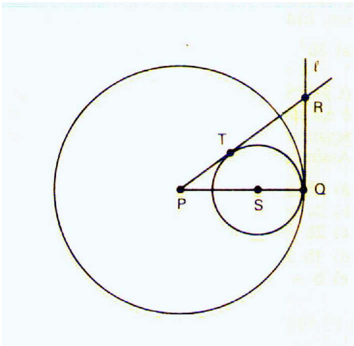
Se dois segmentos , um tangente e outro secante a uma mesma circunferência , se interceptam externamente a ela , então o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto da medida do segmento secante inteiro pela medida da parte externa à circunferência deste mesmo segmento .

<u>OBS</u> : Esse resultado pode ser generalizado para um segmento tangente e vários outros segmentos secantes a uma mesma circunferência , ou seja , se PA é um segmento tangente a uma circunferência e PA_1 , PA_2 , PA_3 , ... e PA_n são secan- tes à mesma circunferência , respectivamente , por A_1 e B_1 ; A_2 e B_2 ; A_3 e B_3 ; ... e A_n e B , então

$$\boxed{(AP)^2 = (PB_1).(PA_1) = (PB_2).(PA_2) = \ldots = (PB_n).(PA_n)}$$

Exercícios Resolvidos :

1) (CESGRANRIO - COMCITEC /RJ) - Na figura dada , as circunferências de centros P e S são ambas tangentes à reta λ no mesmo ponto Q e a reta que passa por P e R tangencia a circunferência menor no ponto T . Sendo os raios das circunferências respectivamente 8 m e 3 m calcule a medida do segmento QR .



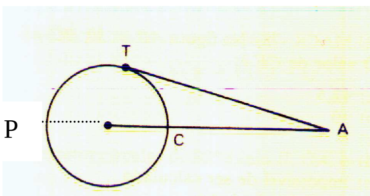
a) Tomando como referência a circunferência menor , temos :
$(PT)^2 = (PM).(PQ)$, sendo M o ponto da circunferência menor entre P e S . Se convencionarmos que NR = y (sendo N o ponto da circunferência maior entre R e T) e RT = x , teremos , de acordo com a equação anterior , $(8 + y - x)^2 = 2.8 = 16$ ou $8 + y - x = 4 \Rightarrow x - y = 4$ ou $\mathbf{x = 4 + y}$ **(I)** ;

b) Tomando como referência a circunferência maior , temos :
$(QR)^2 = (NR).(RO)$, sendo O o ponto onde o prolongamento do seg mento RP corta a circunferência . Então , de acordo com a convenção anterior , temos $x^2 = y.(y + 16)$, ou , ainda , $\mathbf{x^2 - y^2 - 16y = 0}$ **(II)** ;

c) Substituindo (I) em (II) , temos $(4 + y)^2 - y^2 - 16y = 0 \Rightarrow \mathbf{y = 2\ m}$;

d) Substituindo o resultado anterior em **(I)** temos , finalmente , **x = 6 m** , ou seja , **QR = = 6 m .**

2) (CESCEA - SP) - Na figura , o segmento AT é tangente à circunferência de raio **r** . Se **AT = 2r** , calcule a medida AC .

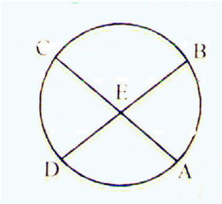


Prolongando-se o segmento AC até que ele intercepte a circunferência do outro lado no ponto P , temos , pelo Teorema mostrado anteriormente
$(AT)^2 = (AC).(AP)$; mas como AP = AC + 2r , ficamos com $(2r)^2 = (AC).(AC + 2r) \Rightarrow$
$4r^2 = (AC)^2 + 2r.(AC) \Rightarrow (AC)^2 + 2r.(AC) - 4r^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4r^2 + 16r^2 = 20r^2$ e , então ,

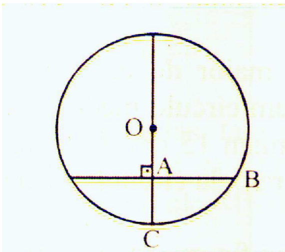
$$AC = \frac{-2r \pm \sqrt{20r^2}}{2} \Rightarrow AC = r(\sqrt{5} - 1) .$$

Exercícios Propostos :

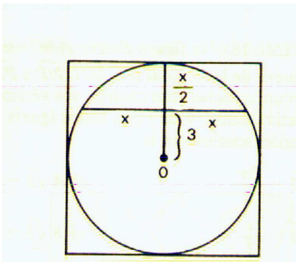
1) Na figura abaixo são dados $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$, $\mathrm{BE} = 8\,\mathrm{cm}$ e $\mathrm{ED} = 6\,\mathrm{cm}$. Calcule a medida AC em centímetros .



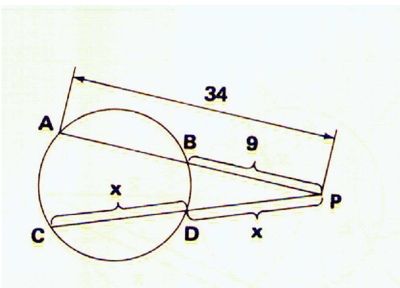
2) Na figura , O é o centro da circunferência ; AB = a ; AC = b e OA = x . Calcule x em função de a e b .



3) (U. Mackenzie - SP) - Calcule a área do quadrado de centro O da figura abaixo.



4) Calcule o valor de **x** na figura a seguir :

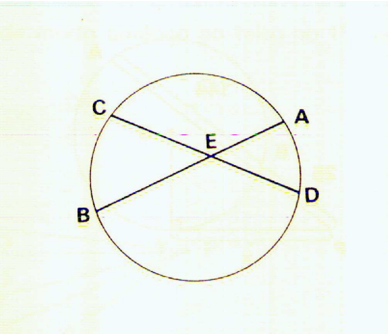


5) Dois segmentos PA e PT são tais que PA intercepta a circunferência λ nos pontos A e B , sendo PA > PB e PT tangencia a mesma circunferência em T . Se PB = 25 e AB = 144 , calcule a medida PT .

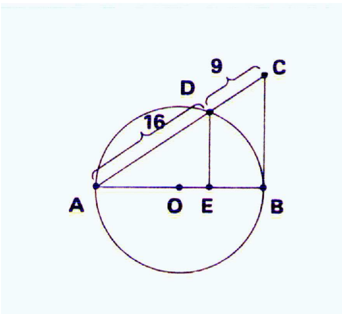
6) Duas cordas BD e CE de um disco se interceptam em A , de modo que AE = x, AC = 4x - 1 , AB = 3x e AD = x + 1 . Calcule as medidas dos segmentos BD e CE .

7) Duas cordas AB e CD interceptam-se num ponto P interno a uma circunferên - cia . Determine a medida do segmento BP , sabendo que os segmentos CP , DP e AB medem , respectivamente , 1 cm , 6 cm e 5 cm .

8) Na figura , $\frac{ED}{EC}=\frac{2}{3}$, AE = 6 e EB = 16 . Calcule o comprimento de CD .

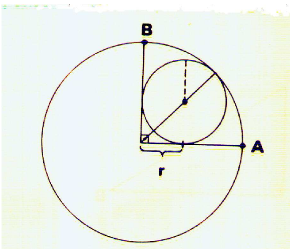


9) Determine a medida do segmento DE da figura , sabendo que AB é diâmetro da circunferência , B o ponto de tangência do segmento BC à circunferência e DE é paralelo ao segmento BC .

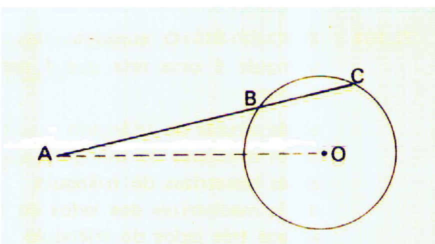


10) Os segmentos AB e AC são duas cordas de medidas iguais , pertencentes a um círculo . Uma corda AD intercepta a corda BC num ponto P . Prove que os tri- ângulos ABD e ABP são semelhantes .

11) Determine o raio do círculo menor inscrito num quadrante do círculo maior , da figura a seguir , sendo **2R** o diâmetro do círculo maior .



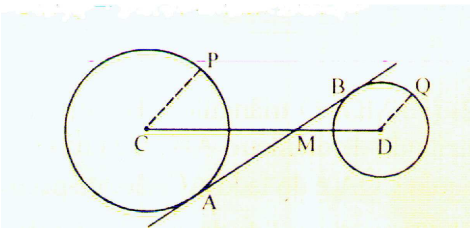
12) (PUC - RJ) - Na figura , ABC representa um trecho reto de uma estrada que cruza o pátio circular de centro O e raio **r** . Se AC = AO = **2r** , calcule BC .



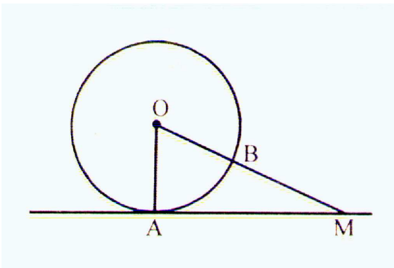
13) (U.C.MG) - A menor distância de um ponto a uma circunferência é 3 m e o segmento da tangente à circunferência é 5 m . Calcule , em metros , o raio da circunferência .

14) Duas circunferências , uma de centro O e raio **R** e outra de centro O' e raio **r** , **R > r** , são tangentes exteriormente . Dois segmentos concorrentes no ponto Q (externo às duas circunferências) são tangentes às duas circunferências e o segmento QP passa pelos centros O e O' das duas circunferências de tal maneira que o ponto P pertence somente à circunferência de centro O' . Calcule , em função de **R** e **r** , a distância PQ .

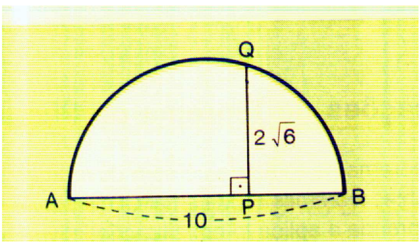
15) (U. F. MG) - Na figura , CD = 30 e a razão entre os raios CP = R e DQ = r é 5 . Calcule MD .



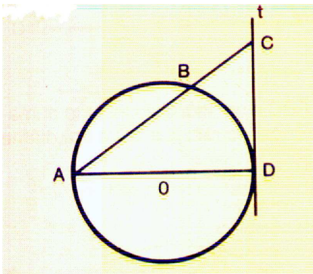
16) (U.F.MG) - Na figura , O é o centro da circunferência , AO = 5 m , AB = AO e a reta AM é tangente à circunferência no ponto A . Calcule MB em metros .



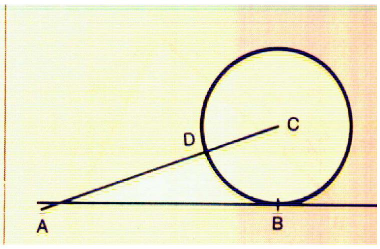
17) Na figura , AB é o diâmetro da semicircunferência . Calcule AP e PB .



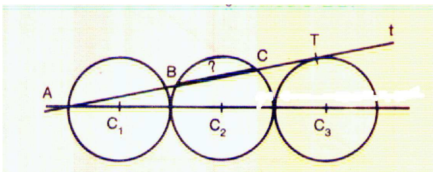
18) Na figura , o raio da circunferência de centro O é igual a 10 . A reta **t** tangencia a circunferência em D . Se AB = 16 , calcule BC e CD .



19) Na figura , a reta **t** tangencia a circunferência em B . Se AB = 12 e AD = 9 , calcule o raio da circunferência .



20) As três circunferências da figura têm o mesmo raio **r = 5** , seus centros estão alinhados e a de centro C_2 tangencia as outras duas . Se a reta **t** é tangente à circunferência de centro C_3 , calcule BC .



21) Numa circunferência , **X** é um ponto da corda AB , tal que AX = 8 m e XB = = 5 m . Se **O** é o centro da circunferência e OX = 3 m , calcule o raio .

<u>Respostas dos exercícios propostos</u> :

1) 16 cm **2)** $\frac{a^2 - b^2}{2b}$ **3)** 100 **4)** $3\sqrt{17}$ **5)** 65 **6)** BD = 17 e CE = 19 **7)** 2 ou 3

8) 20 **9)** 9,6 **11)** $R(\sqrt{2}-1)$ **12)** $\frac{1}{3}(AB)$ **13)** $\frac{8}{3}$ **14)** $\frac{2r^2}{R-r}$ **15)** 5 **16)** 5 m **17)** AP= = 6 e PB=4 **18)** BC = 9 e CD = 15 **19)** $r = \frac{7}{2}$ **20)** BC = 8 **21)** 7 m